Sur le théorème d'Arzela–Ascoli dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes

TUMUSIFU SENYONI Sadok*

Résumé

Dans ce travail, nous énonçons et démontrons le théorème d'Arzela–Ascoli dans le cadre des espaces fonctionnels quasi-uniformes. La démonstration proposée généralise celle connue dans le cas des espaces fonctionnels uniformes et conduit à de nombreuses observations et applications nouvelles en topologie. Pour y arriver, nous nous servons de la méthode inducto-déductive, qui nous permet d'arriver à la dite généralisation considérée comme résultat principal.

Mots clés : *Espace, Quasi-uniforme, Fonctionnel, Équicontinuité, Compacité.*

Abstract

In the following, we state and prove the Arzela–Ascoli theorem in the context of quasi-uniform functional spaces. The proposed proof generalizes the one known in the case of uniform functional spaces and leads to numerous new observations and applications in topology. To achieve this, we use the inductive-deductive method, which allows us to arrive at the aforementioned generalization, considered as the main result.

Keywords: *Space, Quasi-uniform, Functional, Equicontinuity, Compactness.*

I. Introduction

L'analyse fonctionnelle est une branche des mathématiques qui étudie les espaces de fonctions. Contrairement aux mathématiques classiques, qui se concentrent sur des objets tels que les nombres ou les formes géométriques, l'analyse fonctionnelle se concentre sur les fonctions elles-mêmes. Historiquement, comme on peut le rencontrer dans l'ouvrage d'Anderson (1987), l'analyse fonctionnelle émerge au début du XXe siècle avec Stefan

* *Enseignant – Chercheur, Assistant de Deuxième mandat à l'* ***Institut Supérieur Pédagogique – ISP – de Kichanga****, Département de Mathématiques Physique, RD Congo, E-mail : sadoktumusifu368@gmail.com, Téléphone : +243 896 350 652.*

Banach, considéré comme l'un des fondateurs de cette discipline. Prenons un ensemble non vide X et une collection de sous-ensembles de X × X**,** que nous notons U**.** On dit que U est une structure uniforme si et seulement si :

1. Pour chaque entourage u appartenant à U, la diagonale de X × X est incluse dans u.
2. Pour chaque entourage u de U**,** il existe un autre entourage v tel que la composition $v \circ v$ soit incluse dans u.
3. Pour chaque entourage u de U**,** la réciproque u^{-1} appartient aussi à U**.**

L'ensemble X muni de la structure uniforme U, noté (X, U)**,** est alors appelé un espace uniforme**.** Lorsque, pour un entourage u de U, sa réciproque u^{-1} n'appartient pas nécessairement à U, on parle d'une structure quasi-uniforme.
Dans ce cas, l'ensemble X muni de cette structure quasi-uniforme U est appelé un espace quasi-uniforme, et on le note (X, U)**.**Considérons maintenant deux ensembles X et Y.
On note Y^X l'ensemble de toutes les fonctions définies de X vers Y.
Si X est un espace topologique et Y un espace uniforme, alors pour chaque entourage v appartenant à la structure uniforme U_Y de Y, on définit : W(v) = {(f, g) ∈ $Y^X \times Y^X$ | (f(x), g(x)) ∈ v pour tout x ∈ X}.

L'espace (Y^X, U { Y^X}) est alors un espace fonctionnel uniforme.
Dans le cas où Y est un espace quasi-uniforme, (Y^X, U {Y^X}) devient un espace fonctionnel quasi-uniforme. La formulation du théorème d'Arzela–Ascoli dans les espaces fonctionnels métriques est, au départ, donnée ainsi (voir Fekrache, 2019) : On considère deux ensembles X et Y, et C(X, Y), l'ensemble des applications continues de X vers Y. Supposons que F soit une partie de C(X, Y) qui est équicontinue. Le couple (X, d_X) est un espace compact et (Y,d_Y) un espace métrique complet. Arzela et Ascoli, comme on le lit dans (Bourbaki, 1966), ont affirmé que si F est équicontinue sur X et que, pour tout x appartenant à X, l'ensemble {f(x) | f ∈ F} est relativement compact dans Y, alors F est relativement compact dans C(X, Y).

Dans Bourbaki (1947), ce théorème est formulé dans le cadre d'un espace fonctionnel uniforme.
On remarque qu'en remplaçant l'espace métrique (X, d_X) par un espace topologique X muni

d'un σ-recouvrement, et (Y, d_Y) par un espace uniforme Y, la partie F est remplacée par H|A ⊆F(A, Y), c'est-à-dire la restriction à A des fonctions u ∈ H, avec A ∈ σ. Le théorème se généralise alors en supposant que, pour chaque A ∈ σ, l'ensemble H|A ⊆F(A, Y) est équicontinue, et que pour tout x ∈ X, l'ensemble H(x) ⊆ Y est précompacte.

L'espace uniforme généralise l'espace métrique, et le théorème d'Arzela–Ascoli formulé dans les espaces fonctionnels uniformes généralise celui des espaces fonctionnels métriques. L'espace quasi-uniforme, à son tour, généralise l'espace uniforme.

Dans ce contexte, il est donc naturel de se poser la question suivante : le théorème d'Arzela–Ascoli, connu dans les espaces fonctionnels uniformes, peut-il être formulé et démontré dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes ?

Et une telle généralisation peut-elle conduire à des applications nouvelles et intéressantes ?

Dans ce travail, nous formulons et démontrons le théorème d'Arzela–Ascoli dans le cadre des espaces fonctionnels quasi-uniformes, en nous appuyant sur la méthode inducto-déductive.
La première section regroupe certains résultats concernant les espaces quasi-uniformes, les espaces fonctionnels quasi-uniformes, la convergence quasi-uniforme, la topologie de la convergence quasi-uniforme ainsi que l'équicontinuité.

Enfin, la dernière section présente l'essentiel de notre contribution, à savoir la formulation et la démonstration du théorème d'Arzela–Ascoli dans ce contexte.

II. Espaces fonctionnels quasi-uniformes

Nous commençons par définir les notions essentielles : l'espace quasi-uniforme, l'espace fonctionnel quasi-uniforme, la convergence quasi-uniforme, la topologie de la convergence quasi-uniforme, ainsi que l'équicontinuité. Ces concepts sont indispensables pour une meilleure compréhension de notre travail.

2.1. Définitions

Définition 1 : Espace quasi-uniforme

Soit X un ensemble non vide. Une famille U de sous-ensembles de X × X est appelée une *quasi-uniforme* sur X si elle vérifie les conditions suivantes :

1. Pour tout U dans U, la diagonale de X, notée Δ_X = {(x, x) : x ∈ X}, est incluse dans U.
2. Si U appartient à U et U est inclus dans V, alors V appartient aussi à U.
3. Si U et V appartiennent à U, alors leur intersection U ∩ V appartient à U.
4. Si U appartient à U, il existe V dans U tel que la composition V ∘ V soit incluse dans U.
5. Si, en plus, pour tout U dans U, l'inverse U^{-1} appartient à U, alors U est une structure *uniforme*. Sinon, U est seulement une structure quasi-uniforme (Bourbaki, 1947).

La paire (X, U) est alors appelée un *espace quasi-uniforme*.

Définition 2 (Continuité quasi-uniforme)

Une application f de X vers Y entre deux espaces topologiques est dite *quasi-uniformément continue* si, pour tout entourage V de f(X) dans Y, il existe un entourage U de X tel que pour tous x_1 et x_2 dans X avec $(x_1, x_2) \in U$, on ait $(f(x_1), f(x_2)) \in V$. Cette notion est une généralisation de la continuité uniforme. Elle est moins restrictive et permet plus de flexibilité tout en gardant un certain contrôle sur l'image des points proches dans X (Pietroski, 1962).

Définition 3 (Espace fonctionnel quasi-uniforme)

Soient X un espace topologique et Y un espace quasi-uniforme. L'ensemble de toutes les fonctions continues de X vers Y est appelé *espace fonctionnel quasi-uniforme*, noté Y^X. Si X et Y sont simplement deux ensembles, Y^X désigne l'ensemble de toutes les fonctions de X vers Y (Iragi, 2023) et (Jean-luc, 1971).

Pour tout v dans la quasi-uniforme de Y, on définit : W(v) = {(f, g) dans $Y^X \times Y^X$: pour tout x dans X, (f(x), g(x)) ∈ v} Alors, l'ensemble B = {W(v) : v appartient à la quasi-uniforme de Y} est une base d'une structure quasi-uniforme sur Y^X

Preuve (esquisse)

- Comme la diagonale Δ_Y est incluse dans v, pour toute fonction f dans Y^X , on a (f, f) ∈ W(v) car (f(x), f(x)) ∈ v pour tout x dans X.
- Si v et v' appartiennent à la quasi-uniforme de Y, on a W(v) ∩W (v') = W (v ∩ v'). En effet, (f, g) appartient à W(v) ∩W (v') si et seulement si (f(x), g(x)) ∈ v ∩ v' pour tout x.
- Pour la composition, W(u) ∘ W(v) ⊆ W (u ∘ v). Si (f, g) ∈ W(u) ∘ W(v), il existe une fonction h telle que (f(x), h(x)) ∈ u et (h(x), g(x)) ∈ v pour tout x, donc (f(x), g(x)) ∈ u ∘ v. Ainsi, (Y^X, la quasi-uniforme définie par B) est bien un espace fonctionnel quasi-uniforme.

Exemple : Considérons l'espace des fonctions continues bornées définies sur l'intervalle [0, 1] à valeurs dans les nombres réels.

- L'espace de départ est X = [0,1].
- L'espace d'arrivée est Y = ℝ, muni de la structure quasi-uniforme induite par la distance usuelle : d $(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$.

Autrement dit, deux nombres réels y_1 et y_2 sont considérés comme proches s'il existe un ε > 0 tel que $|y_1 - y_2| < \varepsilon$. De cet exemple, nous déduisons que la structure quasi-uniforme sur l'espace fonctionnel Y^X est définie à partir de la structure quasi-uniforme sur Y.

Définition de la structure quasi-uniforme sur Y^X:

Pour chaque ε > 0, définissons l'entourage, V_ε = {(y1, y2) ∈ Y × Y | |y1 - y2| <ε} dans Y. Cet entourage traduit la notion de proximité dans Y. Nous définissons alors l'entourage W_ε dans $Y^X \times Y^X$ par : W_ε = {(f, g) ∈ $Y^X \times Y^X$ | pour tout x ∈ X, (f(x), g(x)) ∈ V_ε}.

Autrement dit, W_ε = {(f, g) | pour tout x ∈ [0,1], |f(x) - g(x)| < ε}. Cet entourage correspond à la proximité uniforme entre fonctions sur [0,1].

Interprétation :

- La condition « pour tout x ∈ [0,1], |f(x) - g(x)| < ε » signifie que la différence entre f et g est uniformément contrôlée sur tout l'intervalle [0, 1].
- Ainsi, la structure quasi-uniforme sur Y^X est précisément celle qui engendre la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration : convergence uniforme dans Y^X. Soit une suite de fonctions (f_n) dans Y^X et une fonction limite f ∈ Y^X. La convergence uniforme de f_n vers f signifie que : pour tout ε > 0, il existe N ∈ ℕ, pour tout n ≥ N et pour tout x ∈ [0,1], $|f_n$ (x) - f(x)| < ε. Autrement dit, pour tout ε > 0, il existe N ∈ ℕ, pour tout n ≥ N, (f_n (x), f) ∈W_ε. Cette condition traduit exactement la convergence de la suite (f_n) vers f dans la structure quasi-uniforme définie par les entourages Wε.

Définition (Convergence dans un espace quasi-uniforme)

Soient (X, U) et (Y, V) deux espaces quasi-uniformes, avec U et V respectivement leurs quasi-uniformités. Pour chaque V ∈ V, on définit : W(V) = {(f, g) ∈ Y^X × Y^X | (f(x), g(x)) ∈ V pour tout x ∈ X}. Alors, la famille {W(V) | V ∈ V} forme une base pour une quasi-uniformité W sur Y^X (Pietroski 1962, Iragi 2023). On observe que :

- pour tout U, V ∈ V, W (U ∩ V) = W(U) ∩ W(V),
- pour tout U, V ∈ V, W (U ∘ V) ⊇ W(U) ∘ W(V).

Ainsi, {W(V) | V ∈ V} est bien une base pour la quasi-uniformité W de Y^X. De plus, on : W(V) [f] = {g ∈ Y^X | (f(x), g(x)) ∈ V pour tout x ∈ X} = {g ∈ Y , Y^X | g(x) ∈ V[f(x)] pour tout x ∈ X}.

2.2 Topologie de la convergence quasi-uniforme

Définition : La topologie induite par la quasi-uniformité $\mathcal{U}_{\{Y^X\}}$ est appelée topologie de la convergence quasi-uniforme (Choquet, 1948; Bourbaki, 1947).

Définition (Topologie de la convergence quasi-uniforme sur une collection de sous-ensembles).

(Bourbaki, 1947) Soient X un espace topologique, (Y, $\mathcal{U}$) un espace quasi-uniforme, et $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$ une collection de sous-ensembles de X. Pour chaque A ∈ $\mathcal{A}$ et U ∈ $\mathcal{U}$, on définit : $M_{\{A, U\}} = \{ (f, g) \in F(X, Y) \times F(X, Y) \mid (f(x), g(x)) \in U \text{ pour tout } x \in A\}$.

Alors, la famille $\{M_{\{A, U\}} \mid A \in \mathcal{A}, U \in\}$ constitue une sous-base pour une quasi-uniformité appelée quasi-uniformité de la convergence quasi-uniforme sur les ensembles de $\mathcal{A}(X)$. La topologie induite sur F(X, Y) est appelée topologie de la convergence quasi-uniforme sur les ensembles de $\mathcal{A}(X)$, et elle est notée $\mathcal{U}\_\mathcal{A}$. Voici quelques cas particuliers importants :

(i) Si $\mathcal{A} = \{X\}$, alors $\mathcal{U}\_\mathcal{A}$ est appelée topologie de la convergence quasi-uniforme et notée $\mathcal{U}\_X$.

(ii) Si $\mathcal{A} = K(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ est compact}\}$, alors $\mathcal{U}\_\mathcal{A}$ est appelée topologie de la convergence compacte quasi-uniforme, notée $\mathcal{U}\_K$.

(iii) Si $\mathcal{A} = \sigma K(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ est } \sigma\text{-compact}\}$, alors $\mathcal{U}\_\mathcal{A}$ est appelée topologie de la convergence σ-compacte quasi-uniforme, notée $\mathcal{U}\_\sigma$.

(iv) Si $\mathcal{A} = \sigma_0(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ est dénombrable}\}$, alors $\mathcal{U}\_\mathcal{A}$ est appelée topologie de la convergence dénombrable quasi-uniforme, notée $_{\{\sigma_0\}}$.

(v) Si $\mathcal{A} = K_0(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ est fini}\}$, alors $\mathcal{U}\_\mathcal{A}$ est appelée topologie de la convergence ponctuelle quasi-uniforme, notée $\mathcal{U}_p$ (Alqurash, 2017).

Lemme.

Soit X un espace topologique et (Y, $\mathcal{U}$) un espace quasi-uniforme, et soient A, B ⊆ X, U, V ∈ $\mathcal{U}$ tels que $M_{\{A, U\}} \subseteq M\_\{B, V\}$.

1°) Si $B \neq \emptyset$, alors $U \subseteq V$.

2°) Si $V \neq Y \times Y$, alors $B \subseteq \dot{A}$ (la clôture de A) (Alqurash, 2017).

Démonstration.

(i) Supposons que $B \neq \emptyset$ mais que U n'est pas inclus dans V. Considérons les fonctions constantes $f, g : X \to Y$ définies par $f(x) = a$, $g(x) = b$. Alors $(f, g) \in M_{\{A, U\}}$, mais $(f, g) \notin M_{\{B, V\}}$. En effet, si $A = \emptyset$, alors $(f(A), g(A)) \in \emptyset \subseteq U$. Si $A \neq \emptyset$ et $x \in A$, alors $(f(x), g(x)) = (a, b) \in U$. Ainsi, $(f, g) \in M_{\{A, U\}}$.

D'autre part, puisque $B \neq \emptyset$, pour $x \in B$, $(f(x), g(x)) = (a, b) \notin V$, donc $(f, g) \notin M_{\{B, V\}}$. C'est une contradiction avec $M_{\{A, U\}} \subseteq M_{\{B, V\}}$.

(ii) Supposons que B n'est pas inclus dans la clôture de A. Puisque $V \neq Y \times Y$, choisissons $c, d \in Y$ tels que $(c, d) \notin V$ et $(p, q) \in U$. Définissons $f, g : X \to Y$ par :

- $f(x) = p$ si $x \in \dot{A}$, et $f(x) = c$ si $x \in X \setminus \dot{A}$,
- $g(x) = q$ si $x \in \dot{A}$, et $g(x) = d$ si $x \in X \setminus \dot{A}$.

Alors $(f, g) \in M_{\{A, U\}}$, mais $(f, g) \notin M_{\{B, V\}}$. En effet, si $A = \emptyset$, alors $(f(A), g(A)) \in \emptyset \subseteq U$. Si $A \neq \emptyset$ et $x \in A$, alors $(f(x), g(x)) = (p, q) \in U$. Ainsi $(f, g) \in M_{\{A, U\}}$.

D'autre part, puisque $x_0 \in B$ et $(f(x_0), g(x_0)) = (c, d) \notin V$, on a $(f, g) \notin M_{\{B, V\}}$. C'est contradictoire avec $M_{\{A, U\}} \subseteq M_{\{B, V\}}$. Donc $B \subseteq \dot{A}$.

Définition (Convergence quasi-uniforme).

Soit X un espace topologique et soit F un ensemble de fonctions continues définies sur X. On dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge quasi-uniformément vers une fonction f si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_\varepsilon \subseteq X$ tel que la mesure de E_ε est petite (c'est-à-dire inférieure à ε) et pour tout $x \in X \setminus E_\varepsilon$, on a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour n suffisamment grand (Predoi, 1979; Blanchard, 1969).

Exemple : Prenons l'espace $X = [0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Considérons la suite de fonctions définies par $f_n(x) = x^n$ (Sierpiński, 1921).

Pour chaque x dans [0, 1], $f_n(x)$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Cependant, pour $x = 1$, $f_n(1) = 1$ pour tout n. Pour montrer que f converge quasi-uniformément vers la fonction f(x) = 0, choisissons un ε > 0. Nous voulons trouver un exemple E_ε tel que sa mesure soit petite et que la convergence soit uniforme en dehors de cet ensemble.

Choisissons $E_\varepsilon = [1 - \delta, 1]$ avec δ > 0. Pour tout x dans [0, 1 − δ], on a : $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < (1 - \delta)^n$. Lorsque n est suffisamment grand, $(1 - \delta)^n < \varepsilon$.

2.2.1 Équicontinuité

Définition.

L'équicontinuité dans un espace quasi-uniforme se définit de manière similaire à l'équicontinuité dans un espace uniforme, mais avec quelques adaptations, notamment en tenant compte de la non-symétrie de la quasi-uniformité. On a : X, (X, 𝕌).

Soit (X, 𝕌) un espace quasi-uniforme et $\mathscr{F}$ une famille de fonctions de X vers Y. La famille $\mathscr{F}$ est équicontinue en un point x ∈ X si, pour tout entourage u ∈ 𝕌, il existe un entourage v ∈ 𝕌 tel que, pour tout f ∈ $\mathscr{F}$, si (x, y) ∈ v, alors (f(x), f(y)) ∈ u (Bourbaki, 1966). En comparaison avec l'équicontinuité dans l'espace uniforme, rappelons qu'on utilise un seul entourage pour contrôler la proximité à la fois entre x et y puis de f(x) et f(y), contrairement à l'espace quasi-uniforme où l'on prend deux entourages.

2.2.2 Ensembles compacts d'applications continues

Théorème (Théorème d'Arzela–Ascoli dans les espaces fonctionnels uniformes).

Soit X un espace topologique (respectivement. uniforme), σ un recouvrement de X, Y un espace uniforme, et H un ensemble d'applications de X dans Y. On suppose que, pour tout A ∈ σ, la restriction à A de toute application u ∈ H est continue (respectivement. uniformément continue). Pour que H soit précompact pour la structure uniforme de la σ-convergence, il est nécessaire dans tous les cas, et suffisant lorsque les ensembles A ∈ σ sont compacts (respectivement. précompacts), que les conditions suivantes soient vérifiées (Bourbaki, 1947 ; (Caserta, 2010) :

a) Pour tout A ∈ σ, l'ensemble $H|_a \subset (A, Y)$, formé des restrictions à A des fonctions u ∈ H, est équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue).

b) Pour tout $x \in X$, l'ensemble $H(x) \subset Y$ des valeurs $\{u(x) \mid u \in H\}$ est précompact.

Preuve

Nécessité de a) et b)

On sait que l'application $u \to u(x)$ de $F\sigma(X, Y)$ dans Y est uniformément continue si H est précompact. Il en est donc de même pour H(x). Ceci établit la nécessité de la condition b).

Pour prouver la nécessité de a), considérons un ensemble $A \in \sigma$, un point $x_0 \in A$, et un entourage V de Y. Puisque H est précompact, il peut être recouvert par un nombre fini d'ensembles de diamètre contrôlé dans la structure uniforme de W (A, Y). Autrement dit, il existe une famille finie $\{U_i\}$ d'éléments de H telle que pour tout $u \in H$, il existe au moins un indice i avec :

$(U(x), U_i(x)) \in V$ pour tout $x \in A$. (1)

Par ailleurs, chacune des restrictions $U_i|A$ est continue au point x_0 (respectivement. uniformément continue). Il existe donc un voisinage U_i de x_0 dans A (respectivement. Un entourage M_i de A) tel que : $x \in U_i \Rightarrow (U_i(x), U_i(x_0)) \in V$, (2) (Respectivement. $(x', x'') \in M_i \Rightarrow (U_i(x'), U_i(x'')) \in V$). (3) Posons $U = \bigcap_i U_i$ (respectivement. $M = \bigcap_i M_i$), qui est encore un voisinage de x_0 dans A (respectivement. un entourage dans A).

Pour tout $u \in H$, il existe un indice i tel que (1) soit satisfaite. En appliquant (1) en x_0 et en x (respectivement. en x' et x'') et en tenant compte de (2) (respectivement. (3)), on obtient : $x \in U \Rightarrow (U(x), U(x_0)) \in V^3$,

(Respectivement. $(x', x'') \in M \Rightarrow (U(x'), U(x'')) \in V^3$) pour tout $u \in H$. Ceci prouve la condition a).

Suffisance de a) et b) : Les deux assertions a) et b) sont suffisantes lorsque les $A \in \sigma$ sont compacts (respectivement. précompacts). En effet, la condition b) entraîne que H est précompact pour la structure uniforme de la convergence simple. D'autre part, il résulte de a), et du fait que sur H|A la structure uniforme de la convergence simple dans A coïncide avec la structure de la convergence uniforme dans A, que H|A est précompact dans F_u(A, Y). Ceci n'entraîne que H est précompact pour la structure uniforme de la σ-convergence. Il convient de noter que la condition b) de notre théorème est automatiquement vérifiée si Y est un espace précompact.

Du théorème précédent découlent les corollaires ci-après :

Corollaire 1

Soit X un espace topologique (respectivement. uniforme), Y un espace uniforme séparé et complet, H une partie équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue) de T(X, Y). On suppose que H(x) est relativement compact dans Y pour tout point x appartenant à une partie dense D de X. Alors H est relativement compact dans T(X, Y) muni de la topologie de la convergence compacte (respectivement. précompacte) (Bourbaki, 1947).

Tout revient à prouver que pour tout $x \in X$, H(x) est relativement compact, car alors on peut appliquer le corollaire 4.1.1. Comme Y est complet, il suffit de voir que H(x) est précompact pour tout $x \in X$. Or, pour tout entourage non symétrique V de Y, il existe un voisinage U de x tel que, pour tout $x' \in U$ et tout $u \in H$, on ait $(u(x), u(x')) \in V$. Par hypothèse, il existe $x' \in U \cap D$, et comme H(x′) est relativement compact dans Y, il existe un nombre fini de points $Y_k \in Y$ tels que H(x′) est contenu dans la réunion des ensembles $V(Y_k)$. Alors H(x) est contenu dans la réunion des ensembles $V(Y_k)$, d'où le corollaire.

Corollaire 2

Soit X un espace localement compact, Y un espace uniforme séparé, H une partie de T(X, Y). Pour que H soit relativement compact dans Tc(X, Y), il faut et il suffit que H soit équicontinue et que pour tout $x \in X$, H(x) soit relativement compact dans Y (Bourbaki 1947).

En effet, compte tenu du corollaire 2.2.2, il suffit de montrer que H est relativement compact dans Tc(X, Y). Alors H est équicontinue. Or tout point $x \in X$ admet un voisinage compact A, et H|A est équicontinue, ce qui entraîne que H est équicontinue au point x, d'où le corollaire.

2.2.3 Cas particulier du théorème d'Arzela-Ascoli dans un espace métrique

En prenant (X, d_X) qui est l'espace métrique compact à la place de l'espace topologique X avec σ-recouvrement de X,

et (Y, d_Y) qui est l'espace métrique complet à la place de l'espace uniforme Y, ensuite prenons $\mathfrak{F}$ une partie de C(X, Y) à la place de H|A ⊂ (A, Y) qui est la restriction à A des fonctions u ∈ H avec A ∈ σ, on peut alors particulariser notre théorème en supposant que :

1. $\mathfrak{F}$ est équicontinue sur X.
2. Pour tout x ∈ X, l'ensemble {f(x) | f ∈ $\mathfrak{F}$} est relativement compact dans Y. Alors $\mathfrak{F}$ est relativement compact dans C(X, Y) (Harizi, 2022).

a. Compacité dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes

Cette section représente l'essentiel de notre contribution dans ce travail. Nous formulons et démontrons notre théorème d'Arzela–Ascoli.

Théorème (Théorème d'Arzela–Ascoli dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes)

Soit (X, U) un espace quasi-uniforme, Y un espace topologique séparé, et $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions continues de X vers Y. Alors, $\mathfrak{F}$ est relativement compacte dans l'espace des fonctions continues de X vers Y, muni de la topologie de la convergence compacte, si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. **(Équicontinuité)**
   Pour tout point x ∈ X et pour tout entourage u ∈ U, il existe un entourage v ∈ U tel que, pour tout f ∈ $\mathfrak{F}$ et pour tout y ∈ X vérifiant (x, y) ∈ v, on a : (f(x), f(y)) ∈ u.
2. **(Équicontinuité à l'infini)**
   Pour tout entourage u ∈ U, il existe un entourage v ∈ U et un sous-ensemble compact K de X tels que, pour tout f ∈ $\mathfrak{F}$ et pour tout x ∈ X – K, on a : (f(x), f(y)) ∈ u pour tout y ∈ X tel que (x, y) ∈ v.

Démonstration

Supposons premièrement que $\mathfrak{F}$ est relativement compacte dans l'espace des fonctions continues de X vers Y muni de la topologie de la convergence compacte. Fixons x ∈ X et u ∈ U.

Alors, il existe un voisinage v de f dans l'espace des fonctions continues tel que, pour tout g ∈ V, on ait : (f(x), g(x)) ∈ U.

Puisque $\mathfrak{F}$ est relativement compacte, il existe un sous-ensemble fini $\mathfrak{F}'$ de $\mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{F}'$ est dense dans $\mathfrak{F}$ pour la topologie de la convergence compacte. En particulier, il existe g ∈ $\mathfrak{F}'$ tel que (f(x), g(x)) ∈ U.

Or, g étant continue, il existe un entourage v′ ∈ U tel que, pour tout y ∈ X vérifiant (x, y) ∈ v′, on ait : (g(x), g(y)) ∈ U. En combinant ces deux résultats, on obtient : (f(x), f(y)) ∈ U pour tout y ∈ X tel que (x, y) ∈ v′, ce qui montre l'équicontinuité de $\mathfrak{F}$ en x.

Fixons maintenant u ∈ U. Puisque $\mathfrak{F}$ est relativement compacte, il existe un sous-ensemble fini $\mathfrak{F}'$ de $\mathfrak{F}$ tel que $\mathfrak{F}'$ est dense dans $\mathfrak{F}$ pour la topologie de la convergence compacte.

Pour chaque f ∈ $\mathfrak{F}'$, il existe un compact K_f de X tel que, pour tout x ∈ X \ K_f, on a : (f(x), f(y)) ∈ U pour tout y ∈ X tel que (x, y) ∈ V_f où V_f est un entourage dépendant de f. Considérons K = ⋃{f ∈ $\mathfrak{F}'$} K_f. Alors K est compact, et pour x ∈ X \ K et pour tout f ∈ $\mathfrak{F}'$, on a : (f(x), f(y)) ∈ U pour tout y ∈ X tel que (x, y) ∈ V_f.

Puisque $\mathfrak{F}'$ est dense dans $\mathfrak{F}$, on peut conclure que, pour tout f ∈ $\mathfrak{F}$, il existe un entourage v ∈ U tel que, pour tout x ∈ X \ K,

on ait :

(f(x), f(y)) ∈ U pour tout y ∈ X tel que (x, y) ∈ v.

Enfin, supposons que $\mathfrak{F}$ vérifie les conditions d'équicontinuité et d'équicontinuité à l'infini. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathfrak{F}$. On veut montrer qu'il existe une sous-suite convergente dans l'espace des fonctions continues de X vers Y muni de la topologie de la convergence compacte.

Grâce à l'équicontinuité, pour chaque point $x \in X$ et pour chaque entourage $u \in U$, il existe un entourage $V_x \in U$ tel que, pour tout $f \in \mathfrak{F}$ et pour tout $y \in X$ tel que $(x, y) \in V_x$, on ait :

$(f(x), f(y)) \in U$. On peut recouvrir chaque compact $K \subset X$ par un nombre fini de ces voisinages $V_{\{xi\}}$ centrés en des points $x_i \in K$. Par ailleurs, grâce à l'équicontinuité à l'infini, il existe un compact $K_0 \subset X$ tel que, pour tout $f \in \mathfrak{F}$ et tout $x \in X \setminus K_0$, la famille (f(x))_{f ∈ $\mathfrak{F}$} est relativement équicontinue et reste dans un entourage fixé de Y. Ainsi, en utilisant le théorème d'Arzela–Ascoli (version pour la topologie de la convergence compacte), la suite (f_n) admet une sous-suite (f$\{n_k\}$) qui converge uniformément sur tout compact de X. En effet, soit $\{K_m\}_{\{m\in\mathbb{N}\}}$ une suite croissante de compacts telle que $X = \bigcup_m K_m$. Pour chaque m, on extrait une sous-suite (f_n\{(m)\}) qui converge uniformément sur K_m. En procédant par diagonalisation, on construit une sous-suite diagonale ($f_n\{n_k\}$) qui converge uniformément sur chaque K_m, donc sur tout compact de X. Ceci montre que $\mathfrak{F}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence compacte.

Le théorème d'Arzela–Ascoli dans l'espace fonctionnel quasi-uniforme s'articule autour de deux conditions : la condition nécessaire et la condition suffisante.

La démonstration du théorème d'Arzela–Ascoli dans un espace quasi-uniforme repose sur les conditions d'équicontinuité à l'infini, qui permettent de construire une sous-suite convergente de toute suite de fonctions de $\mathbb{F}$.

L'équicontinuité dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes diffère de celle dans les espaces fonctionnels uniformes. En effet, dans l'espace uniforme, on utilise un seul entourage pour contrôler simultanément la proximité entre x et y, ainsi qu'entre f(x) et f(y). En revanche, dans l'espace quasi-uniforme, deux entourages distincts sont employés : l'entourage V, utilisé pour contrôler la proximité entre x et y, et l'entourage U, utilisé pour contrôler la proximité entre f(x) et f(y). La non-symétrie de la structure quasi-uniforme est ainsi prise en compte.

Corollaire 1

Soit X un espace topologique (respectivement. quasi-uniforme), Y un espace quasi-uniforme séparé, et H une partie équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue) de $\mathcal{T}$(X, Y).

Supposons que H(x) est relativement compact dans Y pour tout x ∈ X. Alors H est relativement compact dans $\mathcal{T}$(X, Y) muni de la topologie de la convergence compacte (respectivement. pré compacte). En effet, soit $\dot{H}$ l'adhérence de H dans $\mathbb{F}_s$(X, Y), qui est encore un ensemble équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue). De plus, on a $\dot{H}(x) \subset \overline{\dot{H}(x)}$, donc $\dot{H}(x)$ est encore relativement compact. $\dot{H}$ est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence, en désignant par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties compactes (respectivement.. pré compactes) de X. Comme $\overline{\dot{H}(x)}$ est compact, donc complet, $\dot{H}(x)$ est complet pour la structure quasi-uniforme de la convergence simple, donc aussi pour celle de la $\mathfrak{S}$-convergence compacte. Ainsi, $\dot{H}$ est compact, car il est précompact, complet et séparé.

Corollaire 2

Soit X un espace topologique (respectivement. quasi-uniforme), Y un espace quasi-uniforme séparé et complet, et H une partie équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue) de $\mathcal{T}$(X, Y).

On suppose que H(x) est relativement compact dans Y pour tout point x appartenant à une partie dense D de X. Alors H est relativement compact dans $\mathcal{T}$(X, Y) muni de la topologie de la convergence compacte (respectivement.. précompacte). Tout revient à prouver que, pour tout x ∈ X, H(x) est relativement compact, car alors on peut appliquer le corollaire précédent. Comme Y est complet, il suffit de montrer que H(x) est précompact pour tout x ∈ X. Or, pour tout entourage non symétrique V de Y, il existe un voisinage U de x tel que, pour tout x′ ∈ U et tout u ∈ H, on ait : (u(x), u (x′)) ∈ V. Par hypothèse, il existe x′ ∈ U ∩ D, et comme H (x′) est relativement compact dans Y, il existe un nombre fini de points Y_k ∈ Y tels que H (x′) soit contenu dans la réunion des ensembles V(Y_k). Alors H(x) est contenu dans la réunion des ensembles V(Y_k), d'où le corollaire.

Corollaire 3

Soit X un espace localement compact, Y un espace quasi-uniforme séparé, et H une partie de $\mathcal{T}$(X, Y). Pour que H soit relativement compact dans $\mathcal{T}$c(X, Y), il faut et il suffit que H soit équicontinue et que, pour tout x ∈ X, H(x) soit relativement compact dans Y.

En effet, compte tenu du corollaire précédent, il suffit de montrer que H est relativement compact dans $\mathcal{T}$c(X, Y). Alors H est équicontinue. Or, tout point x ∈ X admet un voisinage compact A, et $H|_a$ est équicontinue, ce qui entraîne que H est équicontinue au point x, d'où le corollaire.

b. Discussion des résultats

a) Généralisation du théorème classique : Ce théorème constitue une extension naturelle du théorème d'Arzela-Ascoli classique, formulé dans les cadres uniformes. Lorsque la quasi-uniformité U est symétrique, le théorème se ramène exactement au cadre uniforme. Il généralise donc :

- Le théorème d'Arzela-Ascoli pour la topologie de la convergence compacte sur les espaces topologiques,
- Le théorème d'Arzela-Ascoli dans les espaces fonctionnels uniformes (formulé par Nicolas Bourbaki), et les résultats équivalents dans les espaces métriques.

En remplaçant l'hypothèse d'uniformité par une structure plus souple, le théorème élargit la portée du résultat à des contextes où la symétrie des entourages n'est pas garantie.

b) Relaxation des hypothèses : Une des contributions majeures de cette généralisation réside dans la relaxation des hypothèses de symétrie imposées par la structure uniforme classique. La quasi-uniformité permet de traiter des situations directionnelles, où la continuité ou la régularité d'une fonction peut différer selon les directions.

Cela permet d'analyser des contextes plus complexes, comme :

- les systèmes dynamiques non réversibles,
- les flots orientés (par exemple dans les équations d'évolution),
- les structures avec causalité (ex. en physique théorique ou en topologie des temps).

c) Comparaison avec d'autres résultats : Le théorème s'inscrit dans la continuité des travaux d'Arzela-Ascoli dans les espaces fonctionnels uniformes. Comparé à leurs approches, il offre :

- une formulation plus accessible dans le langage des entourages,
- des conditions nécessaires et suffisantes exprimées de manière constructive,
- une interprétation naturelle de l'équicontinuité à l'infini et de la compacité dans un cadre non symétrique.

Il se distingue également par sa généralité, en ne supposant ni métrique, ni uniformité.

Conclusion et perspectives d'avenir

Le théorème d'Arzela-Ascoli est bien connu et démontré dans les espaces fonctionnels uniformes, qui sont eux-mêmes une généralisation des espaces métriques. Comme l'espace quasi-uniforme constitue également une généralisation de l'espace uniforme, nous nous sommes posés la question suivante avant de débuter notre recherche : est-il possible de formuler et de démontrer le théorème d'Arzela-Ascoli dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes, comme c'est le cas pour les espaces uniformes ? Et si cela est possible, cette formulation permet-elle d'obtenir des applications intéressantes ?

Pour aborder cette problématique, nous avons utilisé la méthode analytique, notamment la technique documentaire, qui nous a permis de consulter plusieurs ouvrages en lien avec notre sujet de recherche. Nous avons également mobilisé la méthode inducto-déductive. Cette approche nous a permis d'étudier le cas particulier du théorème d'Arzela-Ascoli dans les espaces fonctionnels uniformes en le rattachant aux espaces fonctionnels métriques. Ensuite, nous avons généralisé ce théorème, connu dans le cas des espaces uniformes, au contexte plus large des espaces fonctionnels quasi-uniformes, ce qui constitue le cœur de notre contribution.

Dans le cadre de nos travaux, le théorème d'Arzela-Ascoli dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes s'énonce ainsi : soit un espace quasi-uniforme et un espace topologique séparé, et soit une famille de fonctions continues de l'espace quasi-uniforme vers l'espace topologique. Alors, cette famille de fonctions est relativement compacte dans l'espace des fonctions muni de la topologie de la convergence compacte si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour chaque point de l'espace et pour chaque entourage de l'espace quasi-uniforme, il existe un autre entourage tel que, pour toute fonction de la famille et pour tous les points voisins, les images de ces points par la fonction restent proches dans l'espace topologique.
- Pour chaque entourage de l'espace quasi-uniforme, il existe un entourage et un sous-ensemble compact de l'espace de départ tels que, pour toute fonction de la famille et pour tous les points en dehors de ce sous-ensemble, les images restent proches des images des points voisins.

Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes limités à la formulation et à la démonstration du théorème d'Arzela-Ascoli dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes. Faute de temps, plusieurs aspects n'ont pas pu être explorés, notamment :

- La généralisation du théorème à l'espace de Fréchet, qui constitue une extension naturelle de l'espace quasi-uniforme.
- Les applications potentielles du théorème aux problèmes d'approximation des fonctions.
- Les liens possibles avec la théorie des systèmes dynamiques.

Cela étant, notre travail ouvre plusieurs perspectives de recherche intéressantes :

- **Généralisation à l'espace de Fréchet** : Les espaces de Fréchet généralisent les espaces de Banach en autorisant des topologies complètes non normées. Étendre le théorème d'Arzela-Ascoli à ce cadre impliquerait des conditions de compacité adaptées à de nouveaux types de convergence ou de semi-continuité, enrichissant ainsi la théorie des espaces fonctionnels.

- **Applications à l'approximation** : Outil central en analyse fonctionnelle, le théorème d'Arzela-Ascoli permet d'étudier la compacité de familles de fonctions. Il peut ainsi être appliqué à l'analyse de la convergence de suites approchantes, avec des retombées concrètes dans les méthodes d'approximation.

Ces pistes offrent des voies de développement riches et pourraient susciter un intérêt considérable au sein de la communauté mathématique.

Références bibliographique

Blanchard, N. et M. Jourlin, *La topologie de la convergence bornée sur les algèbres de fonctions continues*, Publications du Département de Mathématiques (Lyon), 6(2), 85–96, 1969.

Bourbaki, N. *Éléments de mathématique. Topologie générale*, Chapitres 1 à 4, Hermann, 1966.

Bourbaki, N. *Éléments de mathématique: Topologie générale; Chapitres 5-10*, Hermann, 1947.

Caserta, Agata, Giuseppe Di Maio, et al., *Arzelà's theorem and strong uniform convergence on bornologies*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371(1), 384–392,

Choquet, Gustave, *Convergences*, Annales de l'Université de Grenoble. Nouvelle série. Section sciences mathématiques et physiques, 23, 57–112, 1948.

Fekrache, Safia, Samira Boufekane, et al., *Sur le théorème d'Ascoli-Arzelà*, University of Jijel, 2019.

Grothendieck, Alexandre, *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, American Journal of Mathematics, 168–186, 1952, JSTOR.

Harizi, Haizia et Leila Slimane, *Le théorème d'Arzelà-Ascoli pour un espace quasi-métrique*, 2022.

Iragi Minani et Josef Šlapal, *Transitive quasi-uniform structures depending on a parameter,* Aequationes Mathematicae, 97, Springer, 2023.

Jacob, P., *Convergence uniforme à distance finie de mesures signées*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Section B. Calcul des Probabilités et Statistiques, 15(4), 355–373, 1979.

Jean-Marc Cordier, *Espaces fonctionnels quasi-uniformes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, 12(2), 113–136, 1971.

Patricia Anderson-Gerfaud, Hugues Plisson et Emily H. Moss, *A quoi ont-ils servi? L'apport de l'analyse fonctionnelle*, Bulletin de la Société préhistorique française, 226–237, 1987, JSTOR.

Pietroski, G. *Quasi-uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 103 (1962), 206–227.

Predoi, Maria, *Sur la convergence quasi-uniforme*, Periodica Mathematica Hungarica, 10(1), 31–40, 1979, Akadémiai Kiadó.

Sierpiński, Wacław, *Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues*, Fundamenta Mathematicae, 2(1), 41–49, 1921, Polska Akademia Nauk.

Wafa Khalaf Alqurash et Liaqat Ali Khan, *Quasi-uniform convergence topologies on function spaces—Revisited*, Applied General Topology, 18(2), 301–316, Universitat Politècnica de València, 2017.